

SUR L'ENUMERATION DES CHOIX COLLECTIFS ENGENDRANT DES SITUATIONS "A LA MANIERE DE CONDORCET"

Philippe RYCKELYNCK

*Maître de Conférences, Agrégé et Docteur,
Université du Littoral-Côte d'Opale, Dunkerque*

France

philippe.ryckelynck@univ-littoral.fr

Résumé :

L'article est consacré aux configurations dites « paradoxales » surgissant dans des élections ou des procédures de choix collectifs. D'abord, les élections sont formalisées, d'une part, par des graphes pour lesquels on admet différentes notions de connectivité, mais aussi, d'autre part, par des problèmes d'optimisation multi-critères associés à différents agents auxquels des poids sont associés. La recherche de configurations spécifiques joue un rôle important pour les paradoxes de Condorcet et de Borda. Les deux formalismes sont illustrés ensuite par l'élection présidentielle française de 2022, pour laquelle les agents sont choisis comme étant les départements pondérés par les suffrages exprimés. Pour comparer notre approche à celles connues dans la théorie des choix sociaux, les investigations probabilistes classiques ou modernes sont présentées. Vient une étude spécifiquement combinatoire et ensembliste, ne faisant pas recours aux probabilités, afin de déterminer certaines configurations dites de Condorcet. Une formule originale est donnée pour le recensement de toutes ces situations lorsque trois alternatives sont proposées et qu'aucun abstentionnisme n'a lieu.

Mots-clés : *Votes, paradoxe de Condorcet, préordres, théorie des choix sociaux, combinatoire, graphes, énumération, probabilités, agrégation de préordres.*

Abstract:

The article is devoted to the so-called "paradoxical" configurations arising in elections or collective choice procedures. First, the elections are formalized, on the one hand, by graphs for which we admit different notions of connectivity, but also, on the other hand, by multi-criteria optimization problems associated with different agents to which weights are associated. The search for specific configurations plays an important role for the paradoxes of Condorcet and Borda. The two formalisms are then illustrated by the french presidential election of 2022, for which the agents are chosen as being the departments weighted by the votes cast. To compare our approach to those known in social choice theory, classical or modern probabilistic investigations are presented. Then comes a specifically combinatorial and set-theory based study, not resorting to probabilities, in order to determine certain so-called Condorcet configurations. An original formula is given for listing all these situations when three alternatives are proposed and no abstention occurs.

Keywords: *Votes, Condorcet paradox, preorders, social choice theory, combinatorics, graphs, enumeration, probabilities, preorder aggregation.*

Classification JEL : *D72, D79, C44, C60, C02.*

1. Introduction, position du problème et plan de l'article

Cet article est consacré à la description d'une nouvelle approche *énumérative* basée sur la *combinatoire ensembliste* des votes ou choix collectifs pouvant amener des situations en quelque sorte paradoxales, à la façon de celles imaginées, mais non quantifiées, par Condorcet. Dans son opus de 1785, Condorcet avait prédit que, quand bien même chaque membre d'une collectivité amenée à décider de certains choix, tels que des votes, agit de façon rationnelle, autrement dit sur la base d'un préordre transitif, alors la collectivité en son ensemble peut ne pas émettre d'arbitrages rationnels. Quinze ans auparavant, en 1770, J. C. de Borda avait conçu un système de vote pondéré, qui permettait la situation nommée par la suite paradoxe de Borda. Un perdant de Condorcet est un candidat battu dans chacun de ses duels. Ce second paradoxe tient dans le fait qu'il est possible qu'un certain perdant de Condorcet soit élu dans le système pondéré de Borda.

Cependant, d'une façon concise, le théorème du jury de Condorcet garantit qu'asymptotiquement les votes collectifs sont en quelque sorte plus rationnels que les votes individuels. Le paradoxe de Condorcet ne surprend plus guère, et il revient à dire que l'agrégation de graphes de relations binaires transitives de préférences n'est pas nécessairement un préordre. Pour comprendre ceci on donnera aux §2 et §3 quelques définitions et on plantera le décor d'une façon très formelle. Au §4 nous donnerons le minimum de détails probabilistes du théorème du jury de Condorcet, nécessaires pour comparer notre approche nouvelle avec le traitement probabiliste classique.

La théorie des choix sociaux est l'ensemble des questions liées à la prise de décisions par des collectivités. Le traité de Condorcet en 1785 peut servir de date de naissance et l'âge adulte culmine avec les travaux de Arrow et de Sen (tous deux prix Nobel) durant un demi-siècle¹. Différents auteurs ont apporté leur pierre à cet édifice, et tout spécialement Borda en 1781, et Kemeny² en 1959. Un problème essentiel en économie, notamment dans la théorie de l'équilibre économique, est de quantifier un ensemble d'alternatives A basé sur les résultats de choix ou de votes émis par un ensemble de décideurs ou votants D . La notion de votants peut être prise en un sens large, puisque l'on peut concevoir des scénarii dans lesquels ces votants sont des recruteurs, des décideurs, des entrepreneurs, des investisseurs, ou même des sites internet ou des requêtes internet. Semblablement, le concept d'alternative est assez vaste pour inclure des candidats à différents postes, des stratégies industrielles ou commerciales, des opportunités ou encore, respectivement, des sites web indexés par Google, voire des articles indexés par CiteSeer, des ventes sur eBay, et pourquoi pas des films sur Netflix.

La question centrale a été constamment celle de l'agrégation des préordres de décisions, autrement dit, d'une façon toute simple, le comportement asymptotique des résultats d'élections, lorsque le nombre de décisions ou le nombre de votants devient grand. Et les deux théorèmes fameux d'impossibilité de Arrow en 1951 ou de Sen en 1970 ont révélé que la théorie des choix sociaux comporte une grande difficulté pour assurer la convergence

¹ On peut isoler tout spécialement deux références. Arrow, K. J., 1950. A Difficulty in the Concept of Social Welfare, *Journal of Political Economy* 58(4): 328–346. Cinquante ans après, les deux prix Nobel ont dirigé une monographie en trois volumes : Arrow, K. J., Sen, A. K., Suzumura, K., eds. 2002, *Handbook of Social Choice and Welfare*, North Holland.

² Kemeny, J.G., "Mathematics without numbers," *Daedalus*, 88 (1959), pp. 571-591.

correcte, et conforme au bon sens, des préordres des votants. Le théorème célèbre de Gibbard¹-Satterthwaite² affirme que s'il y a plus que trois candidats, toute fonction de choix social surjective définie sur un domaine universel de préférences doit, par nature, être dictatoriale ; de façon plus technique, si les préordres des n votants sont représentés par des fonctions d'utilité $(u_1(a), \dots, u_n(a))$, le préordre collectif résultant pourra être associé à une fonction d'utilité $F(a)=G(u_1(a), \dots, u_n(a))$, mais les exigences de surjectivité et d'universalité n'autorisent rien d'autre qu'une fonction de la forme $F(a)=G(u_k(a))$ où k est un certain indice de votant, qui apparaît comme un dictateur pour la collectivité. Ce théorème a été complété par Aswal, Chatterji et Sen³ qui ont montré que la conclusion du théorème de Gibbard-Satterthwaite reste vraie si la condition d'avoir un domaine universel est remplacée par la condition d'avoir un domaine *indécis* (linked domain)⁴ comme ci-après, au §2. Il est important de noter que toutes ces démonstrations sont de nature ensembliste et qu'aucun argument probabiliste n'y apparaît.

Il est peu fréquent que l'histoire d'une théorie scientifique puisse révéler à quel point celle-ci est marquée, jalonnée, par les traités qui lui ont été consacrés. C'est certainement le cas de la théorie des choix sociaux, que les monographies de K. J. Arrow en 1963, Y. Murakami en 1968, P. C. Fishburn en 1973, T. Schwartz en 1986, M. Aizerman and F. Aleskerov en 1995 et enfin K. J. Arrow, A.K. Sen et K. Suzumura en 2002, ont plus façonnée que les nombreux articles parus.

Faire ici une revue exhaustive de la littérature sur les choix sociaux, et particulièrement les paradoxes de Condorcet et de Borda, serait une tâche fastidieuse et inutile, car de nombreux livres et bien davantage d'articles ont paru sur la théorie des choix sociaux. Mais limitons-nous à noter que, dès le départ, en 1785, Condorcet aborde la théorie des décisions collectives sous l'angle probabiliste, et il sera suivi en cela par de nombreux auteurs. On peut en effet introduire plusieurs lois de probabilité sur l'ensemble A , qui traduisent avec clarté les nombreux événements aléatoires qui se présentent naturellement dans la théorie.

La théorie des choix sociaux a amené des généralisations sophistiquées des considérations précédentes. Ainsi, la possibilité que l'ensemble des alternatives soit infini ou même forme un espace topologique a été étudiée par Plott⁵, McKelvey⁶, et encore Schofield⁷. L'étude des

¹ Gibbard, A., Manipulation of voting schemes: A general result. *Econometrica.*, 41(4) : 587–601, 1973.

² Satterthwaite, M., Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions. *Journal of Economic Theory*, 10(2) : 187–217, 1975.

³ Aswal, N., Chatterji, S., Sen, A., Dictatorial domains. *Economic Theory*, 22(1):45–62, 2003.

⁴ Pramanik, A.. Further results on dictatorial domains. *Social Choice and Welfare*, 45(2):379–398, 2015.

⁵ Plott, C. R., (1967). A Notion of Equilibrium and Its Possibility Under Majority Rule. *American Economic Review*, 57 (4), 787–806.

⁶ McKelvey, R. D. (1976). Intransitivities in Multidimensional Voting Models and Some Implications for Agenda Control. *Journal of Economic Theory*, 12, 472–482. McKelvey, R. D., (1979). General conditions for global intransitivities in formal voting models. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 1085–1112.

⁷ Schofield, N., (1978). Instability of Simple Dynamic Games. *The Review of Economic Studies*, 45(3), 575–594.

décisions gagnantes au sens de Condorcet a amené de nombreuses publications, et on renvoie au livre de Gehrlein pour une vue d'ensemble. Ainsi peut-on penser qu'un tel sujet est clos, et que cette approche probabiliste est la meilleure. Nous espérons montrer qu'il n'en est rien et que la connection entre l'étude des systèmes de votes, la théorie plus générale des choix sociaux, la théorie des préordres et des systèmes de préférences individuelles, et enfin l'optimisation multi-critères est d'une grande richesse conceptuelle et propose de nombreux problèmes délicats et pas tous résolus ; une amorce de connection est faite au §3, tant dans le cadre certain que dans le cadre aléatoire.

Pour insister sur la nuance entre l'approche probabiliste et l'approche ensembliste, et expliquer les divergences des conclusions auxquelles elles mènent, le §4 présente le cadre *binomial* pour les choix des électeurs dans les duels électifs et le §5 le cadre *uniforme* pour les préordres des décideurs, dénommé scénario de la culture impartiale. Au §6 nous prenons, comme exemple complexe pour la suite de nos investigations, la toute récente élection présidentielle en France, considérée comme un choix social collectif pondéré entre 107 décideurs, à savoir les départements et collectivités de France, relatif à 12 alternatives, à savoir les candidats qui se présentèrent.

Dans cet article, nous proposons une approche non probabiliste mais plutôt *combinatoire et ensembliste* de la question de l'agrégation de votes, ou de prises de décisions collectives. Le coeur de cet article apparait dès lors, au §7 on donne les détails de notre nouvelle approche combinatoire. Des possibilités d'extension sont exposés à la fin du §7 et le §8 propose une approche géométrico-combinatoire. Le §9 conclut et fournit une vue d'ensemble.

2. Les élections comme graphes

Soit \mathcal{A} l'ensemble des alternatives, $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$, telle que, par exemple, l'ensemble des candidats à une élection. Soit un ensemble d'agents ou de décideurs $D = \{d_1, \dots, d_N\}$ grâce auquel un arbitrage doit être fait, tel qu'un corps électoral ou bien un conseil d'administration. Pour chaque individu d_i appartenant à D , on se donne une relation binaire R_i dans l'ensemble \mathcal{A} , autrement dit une manière de comparer entre elles et deux à deux les alternatives de \mathcal{A} . C'est ainsi que l'individu d_i préférera strictement la décision a_j à la décision a_k si, pour la relation R_i , grâce à laquelle les tenants des choix sont pensés et organisés, on a $a_j > a_k$. Pour agréger toutes ces relations binaires, on dispose de beaucoup de procédures. Si un décideur d est choisi dans D et qu'il obéisse dans ses choix à une fonction d'utilité $u_d(a)$ une relation binaire R_d dans \mathcal{A} lui est associée, qui permet à d de comparer deux alternatives, par la condition $u_d(a_1) < u_d(a_2)$ si et seulement si $a_1 < a_2$, i.e. d préfère la décision a_2 à son alternative a_1 .

L'agrégation des votes consiste à tenir compte de toutes les relations binaires R_d pour tous les votants pour détecter une relation binaire agrégative qu'on notera R_D , et pour laquelle chaque votant ne contestera pas l'énoncé suivant. Pour détecter quelles alternatives adopter, on part du principe que le vote a généré un consensus autour de deux décisions a_1 et a_2 lorsque $a_1 R_D a_2$ ce qui signifiera que la collectivité D préfère en son ensemble a_2 à a_1 . Mais ce point n'est pas exempt d'un défaut de principe. Supposons n impair, $n = 2k - 1$. Une alternative $a \in \mathcal{A}$ est appelée une gagnante de Condorcet lorsque, pour toute autre alternative $b \in \mathcal{A}$ il

existe au moins k décideurs $i \in \{1, \dots, 2k - 1\}$ qui préfèrent a à b . Ainsi un gagnant de Condorcet est vainqueur contre toute autre alternative $b \in \mathcal{A}$. Il peut se faire qu'il n'y ait pas de gagnante de Condorcet, mais s'il y en a une, il n'y en a qu'une seule. Le paradoxe de Condorcet, observé en 1785, tient dans cela que pour $m = 3$ alternatives, il peut arriver qu'il n'y ait pas de gagnante de Condorcet¹.

Une élection est un triplet $E = (A, V, P)$ formé d'un ensemble A de candidats (qui sont les alternatives) et d'un multi-ensemble de votes V dont les éléments sont des graphes de relations binaires de préférences, qui peuvent être des ordres linéaires dans A , et formé enfin d'un ensemble poids P associés à chaque préordre dans l'ensemble V , le plus souvent les poids n'étant autres que les nombres de répétitions de ces préordres. On rencontre des définitions formelles d'élections comme des couples (A, V) mais ceci n'est nullement satisfaisant. Lorsqu'on se donne une élection $E = (A, V, P)$, on peut former un graphe $G = (\mathcal{A}, W, Q)$ dont les sommets sont les alternatives (ou candidats) et dont les arêtes valuées relient toutes les paires d'alternatives connectées $(a, b) \in W$. Plusieurs définitions inéquivalentes de l'ensemble des arcs W sont possibles. La première définition consiste à exprimer que deux alternatives sont connectées, i. e. $(a, b) \in W$, lorsque le nombre d'agents qui préfèrent strictement b à a est strictement supérieur au nombre d'agents qui préfèrent strictement a à b . On a, cela étant, construit le *graphe de majorité*. Nous emploierons cette définition au §6. Une seconde définition consiste à requérir, pour avoir $(a, b) \in W$, qu'il existe deux votes pour lesquels l'un place a avant b et l'autre place b avant a . L'élection E est indécisive (en anglais on emploie le mot *linked*) s'il existe un ordre linéaire (c_1, c_2, \dots, c_m) dans W tel que les deux premiers candidats dans cet ordre soient connectés et si chaque autre candidat est connecté à au moins deux autres candidats avant lui dans cet ordre², i.e., c_1 et c_2 sont connectés, et pour chaque indice $i \geq 3$, c_i est connecté à au moins deux candidats dans $\{c_1, c_2, \dots, c_{i-1}\}$. Cette seconde définition amène un graphe où l'arbitrage entre les alternatives se fait dans les composantes connexes du graphe³.

Comme le suggère la seconde définition de la connectivité ci-dessus, on voit déjà apparaître des configurations dans l'élection, jouant tel ou tel rôle. La configuration de Condorcet se formalise ainsi : $[NdC1] : a > b > \dots > y > z \wedge z > a$, autrement dit un cycle d'une quelconque longueur. Lorsque les électeurs ont des préordres linéaires, cela ne se produit pas. Récemment, Niclas Boehmer et Nathan Schaar ont fait l'analyse statistique d'un grand ensemble d'élections de plusieurs pays et de plusieurs contextes⁴ et ont recherché dans celles-ci un certain nombre de configurations que nous présentons maintenant. Etant donnés plusieurs électeurs v, v' etc. et plusieurs alternatives a, b, c , etc. (certaines d'entre elles

¹ Deux livres modernes exposent une grande discussion de l'oeuvre du Marquis de Condorcet. D'abord l'ouvrage de Sommerland et McLean en donne une traduction anglaise ainsi : *An essay on the application of probability theory to plurality decision making: Elections*. Le livre de Gehrlein est résolument plus moderne et synthétique.

² N. Aswal, S. Chatterji, and A. Sen. Dictatorial domains. *Economic Theory*, 22(1) :45–62, 2003.

³ On crée ainsi un graphe de décisions qui est partiellement trié, autrement dit les niveaux comportent plusieurs sommets qui sont équivalents deux à deux. Le choix de l'alternative du meilleur niveau reposera sur d'autres critères que le vote ne révèle pas, dans l'esprit des méthodes multi-critères (voir l'article de l'auteur dans ces Cahiers du Cedimes).

⁴ Boehmer, N., Schaar, N., *Collecting, Classifying, Analyzing, and Using Real-World Elections*, preprint ArXiv.

pouvant être identiques), ces auteurs inspectent, dans des votes ayant eu lieu, la présence des situations suivantes¹ :

$\alpha : a \succ b \succ c \wedge d \succ b, c \succ' b \succ' a \wedge d \succ' b$; [ici les deux électeurs disent le contraire l'un de l'autre sauf pour b et d]

$\beta : a \succ \square \succ c \succ d, b \succ' d \succ' a \succ' c$; [ici les deux électeurs ne sont que très partiellement d'accord]

$\gamma : b \succ a \wedge c \succ d \wedge e \succ f, a \succ' b \wedge d \succ' c \wedge e \succ' f, a \succ'' b \wedge c \succ'' d \wedge f \succ'' e$;

[Sur chaque paire d'alternatives il y aura toujours un électeur en opposition avec un autre]

$\delta : a \succ b \wedge c \succ d, a \succ' b \wedge d \succ' c, b \succ'' a \wedge c \succ'' d, b \succ''' a \wedge d \succ''' c$;

$\varepsilon : a \succ b \wedge a \succ c, b \succ' a \wedge b \succ' c, c \succ'' a \wedge c \succ'' b$;

$\sigma : a \succ c \wedge b \succ c, a \succ' b \wedge c \succ' b, b \succ'' a \wedge c \succ'' a$;

$\tau : b \succ a \succ c \vee c \succ a \succ b, a \succ' \square \succ' c \vee c \succ' b \succ' a, a \succ'' c \succ'' b \vee b \succ'' c \succ'' a$;

NdC2 : $a \succ b \succ c, b \succ' c \succ' a, c \succ'' a \succ'' b$.

Ceci permet de détecter que les élections réelles n'ont « qu'un seul pic » si ne se présentent pas les situations α et σ , qu'elles sont « à entrée unique » si ne se présentent en elles ni γ ni δ , et quelles sont « séparables » lorsque les cas β et τ sont absents. Toute la difficulté n'est pas de vérifier, dans un exemple donné, la présence ou l'absence, desdites configurations mais plutôt d'estimer d'une part la quantité exacte de ces configurations (voir §6) et d'autre part le nombre total de votes excluant l'une ou l'autre de ces configurations (ceci semble être un problème ouvert). Nous retrouverons ces configurations² plus loin au §6. L'étude des configurations possibles dans des élections arbitraires est faite aussi dans l'ouvrage de Gaertner en 2001.

3. Les élections comme problèmes d'optimisation-multi-critères certains ou aléatoires

Si les décideurs ont tous des préordres de préférences complets, alors on identifie ceux-ci à des éléments de $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, l'ensemble des $n!$ arrangements ordonnés possibles (en anglais des rankings) de \mathcal{A} (i.e. l'ensemble des permutations de \mathcal{A}), et on notera $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ les votes (ou rankings) des N votants ou décideurs. L'hypothèse de départ garantit aussitôt l'existence de fonctions d'utilité individuelles ; les règles habituelles de votes consistent dès lors à agréger ces utilités en une combinaison convexe des utilités individuelles. C'est en ce sens qu'apparaît un problème d'optimisation discret multi-critères. Par exemple, la règle de la majorité pondérée dans le duel entre a vs b emploie des poids w_1, \dots, w_N (ceteris paribus). Ces poids peuvent tous à défaut d'autres informations valoir 1 mais au §6 nous emploierons pour poids des départements de France les nombres des suffrages exprimés. Cela étant, à

¹ Le symbole \wedge (resp. \vee) désigne le “et” (resp. le “ou”) logique. La notation $g \succ' h$ signifie que le second votant préfère g à h. Les énoncés ne sont pas quantifiés car on ne sait pas s'ils ont lieu ou non dans une élection donnée.

² De façon très formelle, un sous-graphe induit $G' = (V', E[G'])$ d'un graphe $G = (V, E[G])$ est défini par la donnée d'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets $V' \subseteq V$ du graphe G en conservant les arcs de G attachés aux sommets de V' , c'est-à-dire exactement $E[G'] = \{(u, v) \in E[G] : u, v \in V'\}$. Sous-graphe induit et configurations sont donc pris pour synonymes.

chaque votant i , on associe une variable aléatoire X_i qui vaut $+1$ s'il vote a , -1 s'il vote b . L'utilité sociale est donc la fonction $X_n^w = \sum_{i=1}^n w_i X_i$, et c'est son signe qui permettra l'arbitrage. La règle de la majorité simple est le cas où $w_i = w_j, \forall i, j$. On notera aussi que si on avait adopté une définition booléenne avec $X_i = 0$ lors d'un vote pour b , les poids n'auraient pas rempli leur rôle, d'où la nécessité de prendre $X_i \in \{-1, 1\}$. Certains auteurs proposent des poids du type $w_i = \mathcal{W}(p_i)$, où la fonction $\mathcal{W}(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$ n'est pas sans évoquer l'entropie cybernétique, et vérifie $\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{W}(p) = -\infty$, $\lim_{p \rightarrow 1} \mathcal{W}(p) = +\infty$ et $\mathcal{W}(p) < 0$ pour $p < 1/2$. Pour mettre en place ce dernier choix il convient de définir les probabilités ou les coefficients empiriques (p_i), qui peuvent être pris comme les nombres de suffrage exprimés, la proportion du capital investi, le nombre de salariés d'une succursale, d'une filiale ou d'un client etc. Mais c'est ainsi qu'on peut déroger à la majorité simple, et concevoir des règles donnant davantage de crédit à des sous-groupes de décideurs particuliers comme par exemple des investisseurs ou des experts.

Nous verrons au §8 la construction d'utilités quadratiques, sur une base combinatoire. Mais il est possible, dans le cadre précédent, de construire une utilité aléatoire pour tout préordre linéaire. Cette construction repose sur des travaux déjà proposés et explicites, dû à R. Duncan Luce en 1959. Le concept de base de Luce est la probabilité qu'un décideur d dans D choisit une alternative appartenant à un sous-ensemble spécifié de A . Soit (Ω, A, \Pr) l'espace probabilisé servant de référence à tous les décideurs. On suppose que l'individu doit choisir une alternative dans un sous-ensemble fini de A . On note $\mathcal{F} = \{S \subset A / |S| \geq 2\}$ où $|S|$ désigne le cardinal de l'ensemble S . Quand le nombre d'alternatives possibles n est assez grand (par exemple un recrutement), la procédure de choix se passe en deux temps. L'agent commence par sélectionner une partie S de \mathcal{F} à laquelle il restreint son choix, puis choisit une alternative précise à l'intérieur de S . Pour chaque élément S de \mathcal{F} , on définit une probabilité \Pr_S sur S : pour a un élément de S , $\Pr_S(\{a\})$ représente la probabilité pour que l'individu ayant sélectionné S choisisse l'action a . On abrège aussi $\Pr_S(a) = \Pr_S(\{a\})$. En particulier, $\Pr_A(S) = \sum_{a \in S} \Pr_A(a)$ est la probabilité pour que l'individu prenne dans S l'alternative qu'il choisit. Pour a et b distincts dans A , on note $\Pr(a, b) = \Pr_{\{a, b\}}(\{a\})$; il s'agit donc de la probabilité de préférer a à b dans le cas d'un choix à faire entre a et b . On suppose que pour tout S appartenant à \mathcal{F} et tout a dans S , $\Pr_S(a) \neq 0$ et on fait l'hypothèse que, pour tout couple (S, T) d'éléments de \mathcal{F} tel que S est inclus dans T , pour tout a élément de S , on a¹ : $\Pr_T(a) = \Pr_T(S) \Pr_S(a)$. En ce cas, la fonction $\Pr(a) / \sum_{s \in S} \Pr(s)$ joue le rôle d'utilité aléatoire désirée, et on l'emploiera à son tour au §6. Il est remarquable qu'un lien étroit existe entre ces utilités aléatoires et les variables suivant la loi logistique. Un exemple numérique sera donné au §6. On pourra se reporter à l'article de Chernoff en 1954 sur la rationalité des choix de décisions.

¹ Ceci signifie, en paraphrasant, que la probabilité de choisir a dans T est égale au produit des probabilités de choisir a dans S et S dans T . Cet axiome a pour autre conséquence que le rapport des probabilités de choix respectives de a et b est donc indépendant de la sélection de l'ensemble d'action contenant a et b .

4. Le traitement probabiliste classique et moderne du paradoxe de Condorcet

Dans son livre, Condorcet donne non seulement son paradoxe, mais deux lois connues sous le nom du théorème du jury. Elles s'expriment toutes deux par des inégalités élémentaires relatives à des sommes binomiales. Soit, lors d'un tour de vote, $p > \frac{1}{2}$ la probabilité qu'un votant choisisse l'alternative $a \in \mathcal{A}$ la plus probable contre l'alternative $b \in \mathcal{A}$. On définit dès lors une variable aléatoire X_i dans $\{0,1\}$ testant le choix de a par la condition $\Pr(X_i = 1) = p$ et donc le choix de b par $\Pr(X_i = 0) = 1 - p$. Ainsi ces votes amènent une suite de variables aléatoires i.i.d.¹ et l'agrégation consiste en ce que, d'une part, la somme de ces variables de Bernoulli X_i n'est autre que le nombre de suffrages apportés à l'alternative a , et, d'autre part, que a est choisie à la majorité simple si $\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{2}$. Le *théorème du jury de Condorcet* (désigné par l'acronyme anglais CJT) énonce que l'événement précédent $(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{2})$ est presque sûr si $n \rightarrow \infty$. Le sens de ceci est que la collectivité choisira presque sûrement l'alternative a telle que $p > 1/2$, dès lors que l'effectif de la population n est suffisamment grand.

La justification de ce qui précède tient en trois propriétés mathématiques simples qu'il est bon de rappeler. Introduisons la notation $q_n = \sum_{m=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$. On a $p < q_n$ ainsi que $q_n = \Pr(\sum_{i=1}^n X_i > \frac{n}{2})$ et on a enfin $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$.

Les successeurs de Condorcet ont généralisé cet énoncé, notamment au cas où les lois des votes ne sont pas i.i.d. mais sont toutes des variables de Bernoulli, de paramètres non forcément égaux et formant une suite de probabilités $(p_k)_{k \geq 1}$ où $p_k = \Pr(X_k = 1)$ avec la réserve qu'on ait $p_k > 1/2 + \varepsilon$ pour un certain réel fixé $\varepsilon \in]0, 1/2]$ et pour tout indice k . On renvoie à l'article de Austen-Smith et Banks pour une approche moderne.

Mais on peut aller un peu encore plus loin dans ces considérations. Pour cela, soient un entier $k \geq 1$ et x un nombre réel, on définit

$$\square_k(x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{2k-1}{\ell} \cdot (1-x)^\ell x^{2k-1-\ell}.$$

Une interprétation probabiliste de $p_k(x)$, pour $x \in [0,1]$, est donnée comme suit. Soit une décision a prise avec la probabilité x et la décision adverse b prise avec la probabilité complémentaire $1-x$. Alors $p_k(x)$ est la probabilité qu'au cours de $2k-1$ délibérations consécutives ou votes, on obtienne au moins k résultats a ou de façon équivalente au plus $k-1$ résultats b . Donnons, sans démonstration, différentes propriétés. Pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel $x \in [0,1]$ on a $p_k(x) + p_k(1-x) = 1$. On en déduit aussitôt $p_k(0) = 0$, $p_k(1) = 1$ et $p_k(1/2) = 1/2$ en insérant $x = 1/2$. Pour les deux propriétés qui suivent, on a besoin du fait que, pour tout $k \geq 1$, la fonction $p_k(x)$ est convexe dans l'intervalle $[0, 1/2]$, c'est-à-dire

¹ Le traitement classique repose sur deux hypothèses qui mériteraient sans doute d'être discutées. D'une part l'indépendance entre les électeurs (ce qui est certainement faux, en raison des partis, des réseaux, des familles etc.) et d'autre part de leur comportement comme des expériences de succès/échec. De là, un modèle plutôt simpliste basé sur des variables de Bernoulli, et aussi des variables binomiales. Rappelons enfin ici que l'acronyme i.i.d. signifie "indépendantes et identiquement distribuées", aussi bien en français qu'en anglais.

que la dérivée $p'_k(x)$ est croissante sur l'intervalle $[0, 1/2]$. Alors, pour tous les entiers $k \geq 1$ et $n \geq 1$, on a $n \cdot p_k(1/n) \leq 1$. Enfin, pour tout entier $k \geq 1$ on a :
 pour tous $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$, on a $p_k(x_1) + \dots + p_k(x_n) \geq n \cdot p_k(1/n)$.

En revenant à l'interprétation probabiliste, si des décideurs indépendants ont des probabilités x_1, \dots, x_n de choisir l'alternative a contre l'alternative b, alors en $2k-1$ tours de scrutin la probabilité empirique du succès de l'alternative a dépassera $p_k\left(\frac{1}{n}\right)$. Ce point, qui semble nouveau, précise la borne inférieure de la probabilité du choix de la bonne décision collective que le théorème CJT garantit, sans lui fournir toutefois de borne explicite connue.

Pour d'autres extensions, on cite seulement, d'une part, l'étonnant travail de Kalai¹ reposant sur des séries de Fourier et, d'autre part, reposant sur la logique mathématique la plus subtile, l'article de Wilson liant le paradoxe de Condorcet au principe de Pareto dans la théorie de l'optimisation.

5. Le scénario de la culture impartiale

Dans cette section, nous présentons l'approche connue sous le nom de scénario de la culture impartiale, et qui est basée non pas sur les probabilités de choix dans les différents dilemmes mais plutôt sur les choix aléatoires dans l'ensemble des préférences individuelles \mathcal{P}_d associé à l'ensemble d'alternatives A . Lorsque le préordre des préférences d'un décideur est complet et qu'il n'y a pas de couple d'alternatives restant indécis, on a affaire à un ordre linéaire ; or, pour un ensemble de d décisions, un ordre linéaire peut être identifié à une permutation² dans le groupe S_d des permutations de d éléments, $\sigma \in S_d$. Quand ceci est acquis, on dispose de plusieurs approches bien distinctes pour agréger des votes ; une discussion intéressante de ceci a été faite par Laslier en 2000. La toute première a été proposée en 1781 par J. C. Borda et consiste à associer, pour chaque alternative i , la somme des distances $n - \sigma(i)$ des rangs de cette alternative au rang final, comptées dans chaque préordre linéaire σ pour chaque électeur³. Une autre approche a été proposée par Kemeny, dans ses articles de 1959 et 1973. On pose $k_{ij}^\alpha = 1$ si le décideur α préfère l'alternative j à l'alternative i , et on pose $k_{ij}^\alpha = -1$ sinon. Cela étant, pour chaque permutation $\sigma \in S_d$, on pose $k_{ij}^\sigma = \text{sign}(\sigma(i) - \sigma(j))$. Si on se donne deux ordres totaux sur les alternatives, autrement dit deux permutations des d alternatives, $\sigma, \tau \in S_d$, alors on définit la distance de *Kemeny-Snell* appelée parfois aussi le tau τ de *Kendall* par la formule

¹ Kalai, G., A Fourier-theoretic Perspective on the Condorcet Paradox and Arrow's Theorem, *Adv. in Appl. Math.* **29** (2002), no. 3, pp. 412–426.

² Grâce à la formule d'interpolation de Lagrange, on justifie que la séquence de nombres $1, \dots, n$ peut être remplacée par n'importe quelle autre séquence strictement croissante de nombres réels.

³ L'appellation de système de votes pondérés est employée généralement lorsque les alternatives reçoivent des poids soit a priori (quand tout décideur peut donner n'importe quel poids à n'importe quelle alternative), soit a posteriori, comme ici, puisque le poids de chaque alternative suppose réalisé le vote. On peut généraliser cela au cas où, en outre, les décideurs ou votants ont eux-mêmes des poids comme c'est le cas au §6. Néanmoins, le système de Borda, même sans poids sur les décideurs, ne paraît guère approprié lorsque le nombre de votants est élevé.

$$d_K(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} |k_{ij}^\sigma - k_{ij}^\tau| = \frac{1}{4} \sum_{i,j} |k_{ij}^\sigma - k_{ij}^\tau|,$$

autrement dit le nombre de paires d'indices qui sont discordantes entre les choix opérés dans σ et dans τ . Les ordres linéaires (ou permutations) qui minimisent la quantité $\sum_{i=1}^n d_K(\sigma, \tau_i)$ sont appelés des *optima de Kemeny* et sont considérés comme les meilleurs choix d'ordres linéaires permettant le classement des alternatives au regard des n ordres linéaires proposés. Snell a suggéré la généralisation de ce problème qui consiste à chercher, étant donnée une famille de poids w_{ij}^α (pouvant valoir tous l'unité) une distribution de signes $x_{ij}^\alpha \in \{\pm 1\}$ qui minimise la somme $\sum_{\alpha,i,j} w_{ij}^\alpha (x_{ij}^\alpha - k_{ij}^\alpha)^2$.

La théorie probabiliste des gagnants de Condorcet repose sur le principe que les préférences individuelles $\sigma_1, \dots, \sigma_{2k-1} \in \mathcal{P}_A$ sont choisies au hasard, suivant la loi uniforme¹ dans \mathcal{P}_A . Une question essentielle est d'évaluer la probabilité $g_{k,n}$ qu'il existe un gagnant de Condorcet lorsque $\sigma_1, \dots, \sigma_{2k-1} \in \square_A$ ont été choisis au hasard ainsi. Telle qu'elle est formulée, cette question est d'une grande complexité, et la recherche sur ce thème s'est concentrée uniquement sur le cas où les préordres sont linéaires. Ce scénario est alors appelé celui d'une culture impartiale, et est apparu en 1968 avec les travaux de Garman et Kamien² et de DeMeyer et Plott³. Ces différents auteurs ont calculé la probabilité précédente pour de petites valeurs de n et k et ont conjecturé que cette probabilité tend vers zéro si $n \rightarrow \infty$ pour un nombre de votants $2k - 1$ fixes. D'autres calculs remarquables de telles probabilités ont suivi en 1979⁴. Ces probabilités sont exprimées grâce à différentes intégrales multiples d'ordre $(2k - 1)$ telles que les suivantes

$$C_k = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp(-S_k(x_1, \dots, x_{2k-1})) dx_1 \dots dx_{2k-1}.$$

Les fonctions $S_k(x_1, \dots, x_{2k-1})$ sont les fonctions polynomiales symétriques élémentaires de Newton. On obtient $C_1 = 1$. La conjecture a été prouvée par R.M. May en 1971, seulement si $k = 2$ autrement dit pour 3 votants et un nombre de décisions tel que $n \rightarrow \infty$ et qui donne aussi la valeur $C_3 = \pi^{3/2}/2 \approx 2.784$. Mais pour $k > 2$ tout reste ouvert. Lisa Sauermann⁵ a démontré le résultat admirable suivant. Pour tout entier $k \geq 1$ fixé et pour $n \rightarrow \infty$, on a $g_{k,n} \simeq C_k \cdot n^{-(k-1)/k} + O_k(n^{-1}(\ln n)^{1/k})$.

Insistons sur le fait inhabituel que c'est le nombre d'alternatives, et non pas de votants, qui tend vers l'infini ici. Dans ce contexte, là encore, la probabilité qu'une décision gagnante de Condorcet tend vers 0 si n tend vers l'infini, mais à un rythme bien différent de ce qu'annonce le CJT consacré à un nombre fixe d'alternatives et grand de votants. On voit en effet que le

¹ Ceci entre en contradiction avec le traitement classique vu au §4 du paradoxe de Condorcet.

² Garman, M. B., Kamien, M. I., (1968). The paradox of voting: Probability calculations. *Behavioral Science*, 13(4), 306–316.

³ DeMeyer, F., Plott, C. R., (1970). The probability of a cyclical majority. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 345–354.

⁴ Gehrlin, W. V., Fishburn, P. C., (1979). Proportions of profiles with a majority candidate. *Computers and Mathematics with Applications*, 5, 117–124.

⁵ Sauermann, L., *On the probability of a Condorcet winner among a large number of alternatives*, Preprint ArXiv.

choix des préordres au hasard, c'est-à-dire avec la probabilité uniforme, n'est pas en cohérence avec les choix de votants conformément au cadre booléen¹.

6. Les résultats départementaux du premier tour des élections présidentielles françaises de 2022

Pour mettre en pratique l'approche qui suivra dans cet article, on se basera sur les scores connus au premier tour des douze candidats à la magistrature suprême en 2022. On peut télécharger² ces données. Le tableau ci-après contient une petite partie de ces scores. Les numéros des départements remplacent leurs dénominations (par exemple 23 désigne la Creuse, 59 le Nord, 75 Paris), et les douze candidats ont été (peut-être un peu cavalièrement³) désignés par leurs initiales (de sorte que par exemple PP désigne M. Philippe Poutou tandis que EM désigne le vainqueur du second tour, et ainsi de suite).

Dépt.	23	33	54	59	75	78	95
NA	0,73	0,41	0,67	0,6	0,27	0,38	0,45
FR	3,64	2,41	2,25	3,6	1,64	1,59	1,9
EM	23,25	28,72	26,92	26,37	35,33	33,41	26,09
JL	6,4	4,23	2,47	1,76	1,15	1,86	1,72
MLP	25,09	21,47	27,49	29,27	5,54	13,77	17,2
EZ	5,24	6,54	6,65	5,74	8,16	8,74	7,09
JLM	20,46	21,84	20,89	21,95	30,09	22,89	33,17
AH	2,45	2,2	1,8	1,43	2,17	1,23	1,15
YJ	2,85	5,23	4,12	3,68	7,61	5,49	3,91
VP	6,57	4,21	3,78	3,33	6,59	8,32	4,99
PP	0,99	0,98	0,91	0,65	0,54	0,54	0,63
NDA	2,33	1,76	2,06	1,62	0,91	1,78	1,7

De surcroît, les fichiers donnés par le gouvernement, indiquent aussi la statistique exhaustive des listes électorales, dans le cas des régions et des départements. On peut donc identifier les 107 départements et territoires à autant de décideurs avec des poids naturels égaux, non pas aux nombres d'inscrits, mais égaux aux nombres de bulletins exprimés à cette occasion. Voici la liste des poids des départements dont le code postal va de 1 à 23 puis de 73 à 78, donnés sous la forme [code_postal, poids] :

¹ Autrement dit, avec les notations p_1, \dots, q_3 de la section 7 ci-après, les préordres des électeurs de la situation traditionnelle forment huit sous-ensembles de \mathcal{P}_A dont les probabilités sont asymptotiquement égales aux huit quantités qui seront vues après le théorème infra de la section 7, à savoir $p_1 p_2 p_3$, $p_1 p_2 q_3$, $p_1 q_2 p_3$, $p_1 q_2 q_3$, $q_1 p_2 p_3$, $q_1 p_2 q_3$, $q_1 q_2 p_3$, $q_1 q_2 q_3$ et non pas les probabilités uniformes obtenues en comptant les électeurs !

² Les résultats sont donnés par régions, par départementq, par communes sur le site institutionnel : <https://www.data.gouv.fr/fr/datasets/resultats-du-premier-tour-de-lelection-presidentielle-2022-par-commune-et-par-departement>.

³ Les initiales (sans point) NA, FR, EM, JL, MLP, EZ, JLM, AH, YJ, VP, PP, NDA désignent Nathalie Arthaud, Fabien Roussel, Emmanuel Macron, Jean Lassale, Marine Le Pen, Eric Zemmour, Jean-Luc Mélenchon, Anne Hidalgo, Yannick Jadot, Valérie Pécresse, Philippe Poutou, Nicolas Dupont-Aignan, dans l'ordre établi par le Conseil Constitutionnel.

[1, 340568], [2, 272455], [3, 191494], [4, 98785], [5, 88162], [6, 570332], [7, 201745], [8, 136829], [9, 94011], [10, 153167], [11, 216955], [12, 175635], [13, 1027368], [14, 394369], [15, 90726], [16, 197699], [17, 402765], [18, 164762], [19, 146602], [21, 288973], [22, 375155], [23, 68979], etc., [73, 251780], [74, 436281], [75, 1071357], [76, 657105], [77, 676131], [78, 749537].

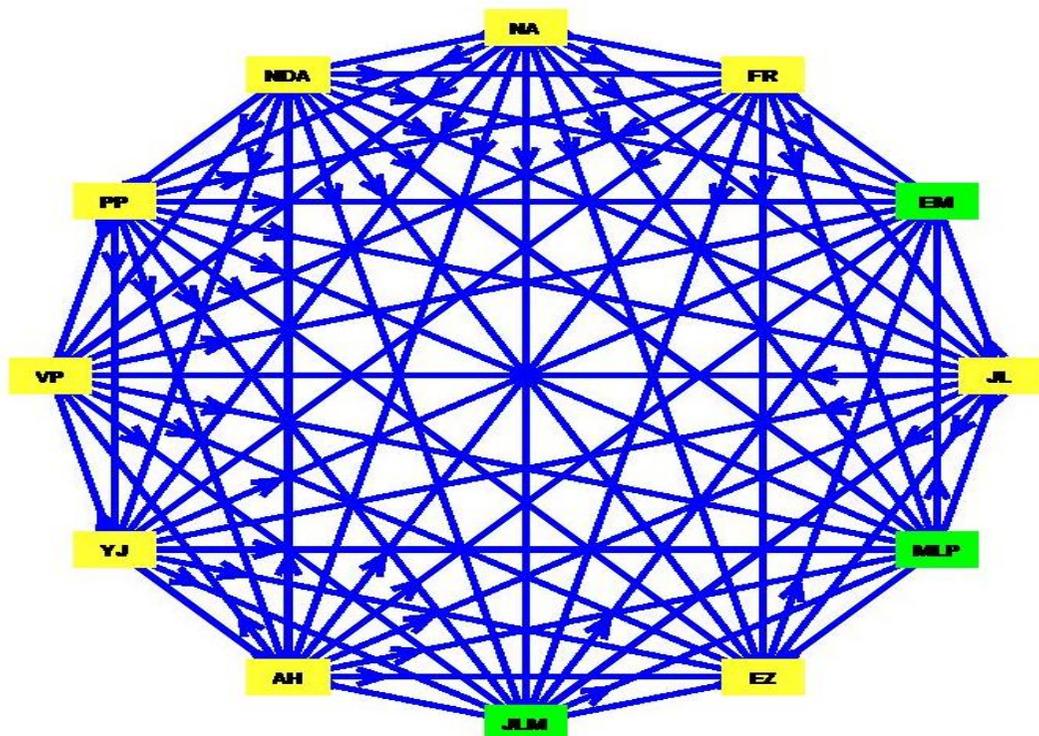
On définit, ainsi, dans ce cadre, un vote à 107 décideurs ayant à choisir parmi 12 alternatives, et on peut considérer le tableau ci-dessus [en fait le tableau complet ayant 107 colonnes et 12 lignes, et duquel le tableau ci-dessus est une réduction] comme définissant 107 fonctions d'utilité individuelles discrètes, ayant été estimées par ces 107 décideurs. On peut également employer des poids équitables (tous égaux à 1) entre les décideurs, des poids aléatoires, ou les poids précis donnés auparavant. Cela étant, le *graphe de majorité* associé à cette élection est donné ci-après, avec la première définition de la connectivité (cf §2). Il est remarquable que les 66 arcs de ce graphe soient exactement les mêmes si on prend les poids « naturels » donnés ci-dessus, ou bien les 107 poids tous égaux à 1. On reviendra sur cette observation surprenante à la fin de ce §. Les degrés entrants (resp. sortants) dans le graphe de majorité sont associés à des duellistes préférés (resp. rejetés) dans les scrutins à deux alternatives.

Donnons les résultats relatifs aux configurations du type de N. Boehmer et N. Schaar observées dans cette élection (voir §2). Il y a précisément 53486 configurations du type α et 13576 configurations du type β . Nous en donnons ci-dessous quelques exemples en respectant la numérotation [a,b,c,d,i1,i2] du §2.

Tout d'abord, voici huit exemples de configurations α qui concernent toutes les mêmes quatre candidats NA, JL, FR, JLM. Les huit couples de départements concernés sont : [Mayotte, Nord], [Mayotte, Ville-de-Paris], [Mayotte, Val-d'Oise], [Mayotte, Val-de-Marne], [Polynésie-française, Allier], [Wallis-et-Futuna, Nièvre], [Wallis-et-Futuna, Nord], [Wallis-et-Futuna, Ville-de-Paris].

Voici maintenant six exemples de configurations β qui concernent toutes les mêmes quatre candidats EZ, VP, NDA, JL. Les six couples de départements concernés sont : [Alpes-Maritimes, Creuse], [Aube, Cantal], [Aube, Corrèze], [Aube, Creuse], [Bas-Rhin, Cantal], [Bas-Rhin, Corrèze], [Guyane, Creuse].

Le dénombrement de toutes les configurations du type γ ou δ paraît impossible, tant le nombre de tests est gigantesque 3 456 649 728 000, dans chacun des deux cas.

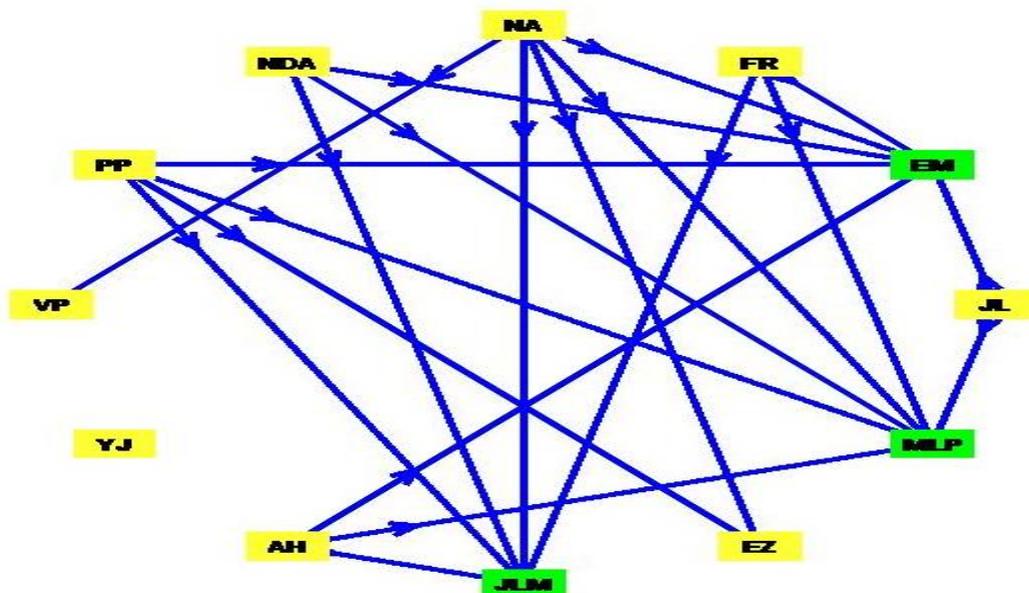


Néanmoins voici six configurations γ qui se présentent pour le Nord et le Jura, les quatre premières incluant les Deux-Sèvres (abrégé DS) : [EZ, YJ, JL, FR, YJ, VP, DS, Nord, Jura], [EZ, YJ, VP, FR, YJ, VP, DS, Nord, Jura], [EZ, VP, JL, FR, YJ, VP, DS, Nord, Jura], [EZ, VP, VP, FR, YJ, VP, DS, Nord, Jura], [EZ, VP, VP, FR, FR, NDA, Creuse, Nord, Jura], [EZ, VP, JL, FR, FR, NDA, Creuse, Nord, Jura].

Voici enfin dix exemples de configurations δ qui se présentent pour les trois départements des Côtes d'Armor, de l'Eure-et-Loir, et de la Nouvelle-Calédonie désignés pour abréger CA, EL, NC en 7^{ème}, 8^{ème} et 9^{ème} position des nona-uplets suivants :

[FR, NA, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, NA, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, NA, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, AH, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, AH, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, AH, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, AH, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, AH, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, AH, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, AH, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC], [FR, PP, EM, MLP, NA, NA, CA, EL, NC].

Les configurations d'un des trois types ε ou σ ou encore τ sont innombrables et les tests à réaliser sont très gourmands en temps CPU. Pour finir, on a déjà vu que NdC1 n'apparaît pas. Mais les configurations NdC2 n'ont pas pu être recensées pour la même raison, aussi bornons-nous à en donner des exemples.



Il est intéressant de donner aussi le graphe d'influence. Fixons deux seuils $f_1, f_2 > 0$. Alors deux candidats i et j sont liés si il y a au moins f_1 départements dans lesquels le quotient du nombre de votants pour j au nombre de votants pour i est au moins égal au seuil f_2 . La figure ci-dessus donne ce graphe d'influence aux seuils $f_1=20$ et $f_2=10$. On notera que les trois candidats les mieux placés ont une valence égale à 5 ou 6. Ce graphe comporte 20 arcs, à savoir $[AH,EM], [AH,JLM], [AH,MLP], [FR,EM], [FR,JLM], [FR,MLP], [JL,EM], [JL,MLP], [NA,EM], [NA,EZ], [NA,JLM], [NA,MLP], [NA,VP], [NDA,EM], [NDA,JLM], [NDA,MLP], [PP,EM], [PP,EZ], [PP,JLM], [PP,MLP]$.

Pour les candidats FR, NDA, AH, la configuration NdC2 apparaît dans dix-huit triplets de départements suivants qui incluent les Bouches-du-Rhône (désigné par BR) et, ou bien la Nouvelle-Calédonie (NC) ou bien la Polynésie-française (PF) ; on note, pour abrégé, w le quadruplet $[FR, NDA, AH, BR]$; la liste des 18 telles configurations est dès lors : $[w, NC, Ariège], [w, NC, Aude], [w, NC, Gers], [w, NC, Haute-Garonne], [w, NC, Ile-et-Vilaine], [w, NC, Landes], [w, NC, Loire-Atlantique], [w, NC, Ville-de-Paris], [w, NC, Tarn], [w, PF, Ariège], [w, PF, Aude], [w, PF, Gers], [w, PF, Haute-Garonne], [w, PF, Ile-et-Vilaine], [w, PF, Landes], [w, PF, Loire-Atlantique], [w, PF, Ville-de-Paris], [w, PF, Tarn]$.

Pour les candidats JL, EZ, VP, la configuration NdC2 apparaît dans quinze triplets de départements suivants qui incluent l'Aveyron ; on note, pour abrégé, w le quadruplet $[JL, EZ, VP, Aveyron]$; la liste des 15 configurations est dès lors : $[w, Nouvelle-Calédonie, Cantal], [w, Nouvelle-Calédonie, Corrèze], [w, Nouvelle-Calédonie, Creuse], [w, Oise, Cantal], [w, Oise, Corrèze], [w, Oise, Creuse], [w, Orne, Cantal], [w, Orne, Corrèze], [w, Orne, Creuse], [w, Ville-de-Paris, Cantal], [w, Ville-de-Paris, Corrèze], [w, Ville-de-Paris, Creuse], [w, Pas-de-Calais, Cantal], [w, Pas-de-Calais, Corrèze], [w, Pas-de-Calais, Creuse]$.

Pour les candidats JL, AH, FR, la configuration $[NdC2]$ apparaît dans les treize triplets de départements suivants qui incluent à la fois le Bas-Rhin et la Ville-de-Paris ; on note, pour abrégé, w le quintuplet $[JL, AH, FR, Bas-Rhin, Ville-de-Paris]$; la liste des 13 configurations

est dès lors : [w, Allier], [w, Bouches-du-Rhône], [w, Cher], [w, Essonne], [w, Hauts-de-Seine], [w, Nièvre], [w, Nord], [w, Pas-de-Calais], [w, Seine-Maritime], [w, Seine-Saint-Denis], [w, Somme], [w, Val-d'Oise], [w, Val-de-Marne]. On vérifie encore que le trio de candidats JL, VP, YJ fournit 14 configurations [NdC2] qui incluent toutes l'Aveyron.

Revenons maintenant sur l'utilité aléatoire fixée à la fin du §3, dont nous gardons les notations $\Pr_T(S)$ et $\Pr_S(a)$. Prenons T formé des douze candidats, et comme sous-ensemble le trio S formé des trois premiers du premier tour, EM, MLP, JLM. Dans le calcul nous choisissons les poids 'naturels'. Voici les trois probabilités (a posteriori) que sortent comme vainqueur chaque candidat.

$$\Pr_T(EM)=0,26270 \text{ et } \Pr_T(MLP)=0,24.786 \text{ et } \Pr_T(JLM)=0,21892.$$

On a $\Pr_T(S)=0.72948$. Ainsi, lorsqu'est acquis le choix du trio S, les trois utilités de Luce (a posteriori) associées à chacun de ces candidats deviennent

$$\Pr_S(EM)=0,36012 \text{ et } \Pr_S(MLP)=0,33978 \text{ et } \Pr_S(JLM)=0,30010.$$

Lorsque les poids adoptés sont les poids « uniformes » égaux tous à 1, il est remarquable que les six valeurs précédentes changent de façon insignifiante de moins de 0,5%, et ceci traduit le fait qu'une certaine uniformité dans les classements a prévalu, lors du premier tour de l'élection présidentielle, que ce soit dans les départements d'effectifs importants ou dans ceux qui sont d'effectifs bien moindres.

7. Une approche combinatoire élémentaire nouvelle du paradoxe de Condorcet

Dans ce paragraphe nous donnons une manière très élémentaire, mais n'ayant pas été signalée¹, d'évaluer toutes les situations « à la Condorcet » pouvant se présenter dans un choix collectif, et notamment dans un vote. Nous nous limitons à 3 alternatives, A, B, C mais la généralisation à plus se fait sans difficulté. Nous supposons aussi que chaque votant tranche entre deux alternatives quelconques, autrement dit *chaque préordre est complet*. Il y a exactement huit classes, deux à deux disjointes, de décideurs en ce cas, que nous allons décrire. Pour cela, notons xyz la quantité de votants qui, entre a et b préfèrent x (qui vaut a ou b), qui entre b et c optent pour y (l'une des deux b,c) et qui enfin choisissent z (soit a soit c) lorsque confrontés au dilemme de a contre c. On formera ainsi les classes : aba, abc, aca, acc, bba, bbc, bca, bcc. Parmi ces six classes, deux sont constituées de votants émettant des choix inconséquents, ou du moins circulaires, à savoir, abc et bca ; notons leurs effectifs par I_1 et I_2 respectivement. Les cardinaux des six autres classes aba, acc, aca, bbc, bba, bcc sont notés $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ respectivement. Définissons ensuite

$$m_1 = I_1 + t_1 + t_2 + t_3, m_2 = I_2 + t_4 + t_5 + t_6, m_3 = I_1 + t_1 + t_4 + t_5, \\ m_4 = I_2 + t_2 + t_3 + t_6, m_5 = I_1 + t_2 + t_4 + t_6, m_6 = I_2 + t_1 + t_3 + t_5.$$

Le nombre m_1 (resp. m_2) est le score obtenu par a (resp. b) dans le vote de a contre b. Semblablement, les nombres m_3, m_4 (resp. m_5, m_6) sont les scores de b et c (resp. c et a, dans

¹ La raison à cela tient dans le fait que, pour être mise en œuvre, cette méthode requiert un logiciel de programmation et que les calculs sur ordinateur sont très intensifs. Nous avons opté pour Maple et C.

cet ordre) dans les votes duels opposant b à c (resp. c à a). On aura nécessairement $n = m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = m_5 + m_6$ et ceci exprime le fait que les préordres sont tous complets, autrement dit que les choix à faire sont dépourvus d'une part d'ambiguïté, et d'autre part aussi qu'il n'y ait aucune abstention. L'énumération de tous les multiplats de nombres $(m_1, \dots, m_6, t_1, \dots, t_6, I_1, I_2)$ vérifiant les conditions précédentes est une question vraiment compliquée, et qu'on ne peut attaquer par "force brute". Le décompte de toutes les situations possibles de votes avec n votants donne : $T(n) = \frac{1}{20} \cdot n^5 + n^4 + \frac{29}{4} n^3 + 23n^2 + \frac{327}{10} n + 17$.

La liste ci-après donne les premières valeurs de cette fonction, à savoir les nombres de résultats possibles de scrutins pour un nombre de décideurs n allant de 3 à 33 :

81, 250, 611, 1287, 2443, 4292, 7101, 11197, 16973, 24894, 35503, 49427,

Une situation « à la Condorcet » se présente lorsque

Ou bien $m_1 > m_2, m_3 > m_4, m_5 > m_6$, ou bien $m_1 < m_2, m_3 < m_4, m_5 < m_6$.

Dans le cas particulier où aucun votant n'a un préordre circulaire, autrement dit où I_1, I_2 sont nuls, on note que les quatre équations définissant m_1, m_2, m_3, m_5 peuvent être résolues en posant

$$t_1 = -m_2 + m_3 + t_6, \quad t_2 = m_5 - m_2 + t_5, \quad t_3 = -m_3 + m_1 - m_5 + 2m_2 - t_5 - t_6, \\ t_4 = m_2 - t_5 - t_6,$$

et il reste les deux équations pour m_4 et m_6 . Introduisons maintenant les coefficients binomiaux $\binom{n}{5}$ qui forment la suite

1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, 1287, 2002, 3003, 4368, 6188, 8568, etc.

On peut écrire un programme à partir de ce qui précède qui révèle que

Théorème. Le nombre total de situations de Condorcet pour lesquelles $m_1 > m_2, m_3 > m_4, m_5 > m_6$ est égal au coefficient binomial $\binom{n}{5}$.

La démonstration rigoureuse de ce fait surprenant est compliquée. Comme conséquence aisée, on note que les fréquences d'apparition des situations de Condorcet, dans le vote agrégé, lorsque les votants ont tous des choix rationnels, autrement dit la suite des quotients $\binom{n}{5} / T(n)$, est croissante et convergente, et sa limite vaut 1/6. Ainsi, dans ce cadre très strict de votants ayant tous des préférences rationnelles, et dans des conditions ne permettant pas l'abstentionnisme¹, la fréquence d'apparition des dites situations de Condorcet n'est en rien négligeable, comme dans les sections 2 et 3.

¹ Cette seconde condition est inessentielle, car on peut remplacer le nombre de décideurs par le nombre de décideurs qui se sont exprimés valablement.

Cette première conclusion de cette approche semble contredire le théorème du jury. Or, si les prémices du CJT s'appliquaient, on pourrait définir six réels $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$, avec $q_i = 1 - p_i$, de sorte que p_1, q_1 soient les probabilités de voter pour a (resp. b) lors d'un choix entre a et b, et de même p_2, q_2 (resp. p_3, q_3) soient celles dans le cas d'un arbitrage entre b et c (resp. c et a). Alors par les propriétés habituelles des lois binomiales on aurait nécessairement les formules suivantes :

$$I_1 = np_1p_2p_3, t_1 = np_1p_2q_3, t_2 = np_1q_2p_3, t_3 = np_1q_2q_3, \\ t_4 = nq_1p_2p_3, t_5 = nq_1p_2q_3, t_6 = nq_1q_2p_3, I_2 = nq_1q_2q_3,$$

pour n assez grand, d'après la loi des grands nombres. Or dans l'approche combinatoire, les huit nombres entiers $I_1, I_2, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ précédents, n'ont d'autres contraintes que celles données par certaines sommes partielles valant n , i. e. $n = m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = m_5 + m_6$; le degré de liberté dans ce choix vaut donc 5. Mais, si cette approche doit être en conformité avec le cadre binomial du CJT alors, les huit nombres I_1, \dots, t_6 obéissent à de nouvelles contraintes et le degré de liberté passe de 5 à 2. Par suite les fréquences de situations de Condorcet *disons* binomiales, sont en proportion de plus en plus faible *Cte.* n^{-3} tandis que le cadre combinatoire précédent donnent une proportion asymptotique de $1/6$.

Intéressons-nous maintenant à la possibilité que l'abstention se produise, ou, ce qui revient au même, que de l'indécision se présente. Conservons les notations précédentes. Si les trois « duels » a vs b, b vs c et c vs a (dans cet ordre) amènent une situation « à la Condorcet », on définit trois nombres entiers p_1, p_2, p_3 par :

$$m_2 = m_1 + p_1, m_4 = m_3 + p_2, m_6 = m_5 + p_3, 2m_1 + p_1 \leq n, 2m_3 + p_2 \leq n, 2m_5 + p_3 \leq n.$$

Pour pouvoir aisément dénombrer ces situations, on peut procéder comme suit. Si le duel a vs b fournit les fractions $\pi_1 = m_1/(m_1 + m_2)$ et $1 - \pi_1 = m_2/(m_1 + m_2)$, et qu'on introduise de même π_2, π_3 , on voit aisément que les trois fractions π_1, π_2, π_3 sont toutes $< \frac{1}{2}$ et que

$$m_1 = \pi_1 p_1 / (1 - 2\pi_1), m_3 = \pi_2 p_2 / (1 - 2\pi_2), m_5 = \pi_3 p_3 / (1 - 2\pi_3),$$

et il reste la condition $2(m_1 + m_3 + m_5) + p_1 + p_2 + p_3 \leq n$. On démontre alors que, pour n donné, le nombre de telles situations vaut $[n/2]^2 + [n/2]^3$. Voici les premières valeurs de cette fonction de n , pour n allant de 5 à 27 (toutes les valeurs exceptées la première se redoublent et nous n'avons pas indiqué cette répétition ci-après)

$$216, 1728, 8000, 27000, 74088, 175616, 373248, 729000, 1331000, 2299968, 3796416, \\ 6028568, \dots$$

Lorsqu'on étudie les fréquences d'apparition de ces situations, autrement dit les ratios entre les nombres précédents et les nombres de votes possibles, on voit que la convergence vers 0 de ces fréquences est rapide, car ces fréquences sont de l'ordre *Cte.* n^{-4} . Cette seconde conclusion n'est pas moins surprenante que la première, supra. Or elle s'explique grâce à l'argument suivant. Les choix des nombres rationnels π_1, π_2, π_3 tous $< 1/2$ et des nombres entiers p_1, p_2, p_3 permettent d'obtenir de bien plus grands nombres de situations de Condorcet,

que ceux obtenus en requérant l'absence d'indécision, mais la fréquence à évaluer se rapporte ici à des possibilités en nombre beaucoup plus important (principalement en raison de la contrainte déjà dite $2(m_1 + m_3 + m_5) + p_1 + p_2 + p_3 \leq n$ qui laisse plus de degrés de liberté), là où, antérieurement, en l'absence d'abstention, le dénominateur dénombrant les situations possibles, de Condorcet ou non, était nettement moindre.

Finissons ce long § par aborder d'autres applications de l'approche combinatoire et ensembliste. Bien entendu, l'approche précédente se généralise avec plus ou moins de bonheur à d'autres situations de votes ou de décisions dans lesquelles on attend que certaines configurations se présentent. Voici un tel exemple. Supposons que dans les trois duels, il n'y ait eu aucun vote blanc ni aucune abstention. On impose ainsi que m_1, m_3, m_5 soient inférieurs à $n/2$ et qu'on ait $m_1 + m_2 = m_3 + m_4 = m_5 + m_6 = n$. On montre aisément qu'on a nécessairement les relations

$$\begin{aligned} aba &= m_3 - abc - bba - bbc, \quad aca = m_4 - m_2 - acc + bba + bbc, \\ bca &= m_5 - \square_1 - bba + abc + acc, \quad bcc = m_6 - abc - acc - bbc. \end{aligned}$$

Ceci laisse 7 degrés de liberté pour les trois variables m_1, m_3, m_5 et les quatre effectifs abc, acc, bba, bbc . Le calcul de toutes ces configurations en fonction de n n'a pas révélé de jolie formule exacte comme celle relative aux coefficients binomiaux. Donnons seulement ici les premières valeurs pour n entre 1 et 16 :

0,0,15,93,99,407,429,1368,1430,3830,3978,9376,9690,20708,21318,42157.

Le calcul de ces nombres est, là encore, très intensif. Pour $n=20$ on obtient 144897, pour $n=26$, on obtient 661364, et enfin pour $n=40$, on obtient 9103248 telles configurations fort spécifiques de Condorcet.

Avec le vœu d'être si possible exhaustif, citons aussi un très bel article de E. Kamwa et F. Valognes¹, dans lequel les auteurs donnent les probabilités de l'apparition du paradoxe de Borda lorsqu'on est en face de trois alternatives ; ces probabilités sont des *vraisemblances* et dépendent très curieusement du reste modulo 12 du nombre de votants. Néanmoins, en dehors de découpages en classes d'électeurs², cet article n'est pas de nature combinatoire, puisque la population électorale est le siège tout entier de plusieurs lois de probabilités définissant les préférences dans les différents duels, ce qui est récusé par le cadre combinatoire. L'approche combinatoire permet d'envisager aussi le rôle important de l'abstention dans les duels intermédiaires, pour expliquer les situations paradoxales « à la Condorcet » ou « à la Borda ».

8. Une approche géométrico-combinatoire donnant une utilité quadratique

Considérons une ensemble fini de n décideurs (ce peut être là une assemblée, un conseil d'administration, un corps électoral, etc.) dont chacun aura à se définir sur m décisions à adopter ou rejeter. On suppose que chaque décision a fait l'objet d'une étude quantifiée qui en

¹ Kamwa, E., Valognes, F., Scoring Rules and Preference Restrictions: The Strong Borda Paradox Revisited, *Revue d'économie politique* 2017/3 (Vol. 127), pages 375 à 395.

² Voir table 1 p. 379 et tables 3 à 5 pages 381 *ibidem* pour ces classes.

fait ressortir d paramètres numériques. Un exemple simple est celui où $n = 2$ (il y a deux alternatives) et $d = 1$ (on retient ou on rejette, 1 ou 0) qui correspond au scrutin uninominal. Le cas où $n = d = 2$ peut aussi correspondre au scrutin uninominal lorsqu'on dispose de fonctions d'utilité associées aux alternatives, voir infra. On associe alors à ce scénario un nuage de points C fini dans \mathbb{R}^d composé des n vecteurs des évaluations de ces décisions $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Cet ensemble peut être booléen ou non, mais cela ne joue pas de rôle ici. Pour agréger mais aussi quantifier les décisions, Good et Tideman ont accepté l'hypothèse qu'on puisse, étant donné un point variable p de \mathbb{R}^d , se baser sur les préordres induits par les mesures des distances de p aux points de C , ce qui signifie qu'on aura $v_i < v_j$ précisément lorsque $d(p, v_i) < d(p, v_j)$. Ils ont d'ailleurs aussitôt généralisé au cas où les préordres sont induits par les sommes des distances des points de C à plusieurs points extérieurs p_1, p_2, \dots, p_k . Ce postulat de départ n'est pas sans rappeler certaines méthodes employées en optimisation multi-critères pour déterminer des ordres linéaires (parfois appelés aussi d'ordres numériques) équivalents aux préordres des acteurs de la décision. On emploie les nombres de Stirling signés de première espèce $s(n, k)$. En 1977, Good et Tideman ont démontré que, si $k = 1$, il existe au plus

$$s(n, n) + s(n, n - 1) + \dots + s(n, n - d)$$

ordres linéaires sur le nuage C . Notamment, si $k = 1$, $d = 2$, le nombre maximum d'ordres linéaires dans l'ensemble C formé de vecteurs de décisions de n votants a pour valeur

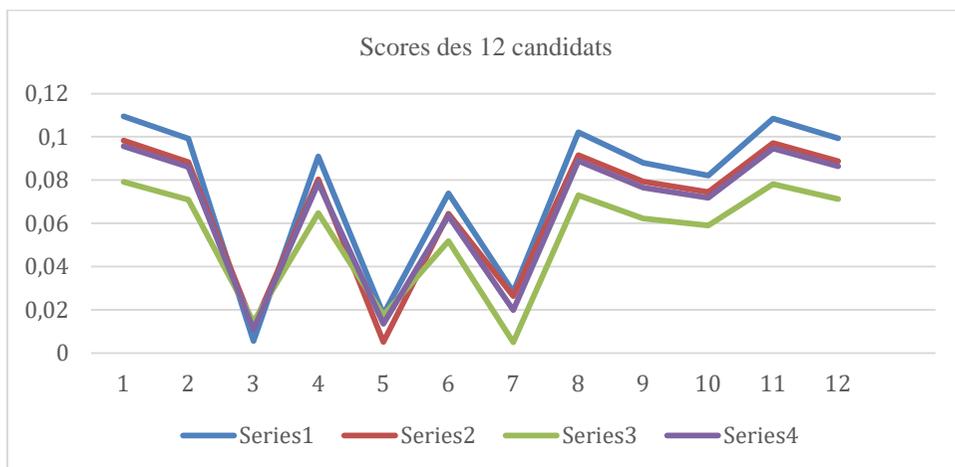
$$s(n, n) + s(n, n - 1) + s(n, n - 2) = \frac{1}{24}(3n^4 - 10n^3 + 21n^2 - 14n + 24).$$

Lorsqu'on veut dénombrer tous les préordres possibles sur le nuage C , on peut introduire un arrangement d'hyperplans (donc des droites si $d = 2$ ou des plans si $d = 3$) comme suit. Pour chaque couple d'alternatives a, b , qu'on identifie ici aux deux points du nuage qui rassemblent leurs évaluations respectives, on peut former l'hyperplan médiateur (la droite médiatrice si $d = 2$ ou le plan médiateur si $d = 3$) qui les séparent et affirmer que, de part et d'autre de cet hyperplan médiateur, se trouvent des alternatives qui seront soit préférées, soit repoussées par les acteurs (par exemple les votants) grâce notamment à l'information provenant des caractéristiques de a et b . Pour être explicite, gardons encore $d = 2$, en ce cas, le nombre maximum de régions déterminées par k droites du plan vaut la somme des trois coefficients binomiaux $\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} = \frac{k^2+k+2}{2}$; comme n points du plan donnent lieu à $\binom{n}{2}$ droites du plan les joignant les uns les autres, on en conclut que le nombre maximum de régions déterminées par n points du plan vaut $\frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 8)$. Il est intéressant de noter également que cette approche revient à choisir des fonctions d'utilité qui sont des polynômes quadratiques par rapport aux caractères des différentes alternatives. Une énumération plus générale, qui n'emploie pas d'utilité exprimée par des distances, avait été donnée par Cover en 1967.

Dans le cas de l'élection présidentielle, l'approche précédente ne peut se mettre commodément en place qu'en supposant $d = 2$. Or le cadre du §7 donne deux mises en œuvre possibles, avec dans un premier cas un nuage de départements $n = 107, m = d = 12$, ou bien un nuage de candidats $n = 12, m = d = 107$, et, dans les deux cas, un ou deux points de référence $k = 1$ ou $k = 2$. Pour rester en conformité avec l'esprit de la méthode, on a choisi pour poids des départements, non pas les nombres de suffrages exprimés mais des coefficients

tous égaux à 1, bien que l'emploi de poids différents n'offre pas de difficulté. De même les poids des candidats sont pris égaux à l'unité (ce ne sont évidemment pas les scores qui sont employés comme coordonnées). On a testé¹ de nombreux choix possibles de points de références.

Pour le nuage de candidats, on a choisi quatre points de référence ; les trois premiers ne sont autre que les scores effectués par les candidats EM, MLP, JLM au premier tour, perturbés tous les trois par des erreurs qui n'affectent que les décimales à partir de la deuxième. Ce choix méthodologique n'est pas si étrange, car les instituts de sondage peuvent donner de telles évaluations avant le vote, avec la précision requise. En quelque sorte, ces points de référence seraient les objectifs attendus pour EM, MLP, JLM. Le quatrième point de référence est le barycentre des trois précédents, incluant les erreurs imposées.



Dans ce graphique, on s'attache davantage aux points les plus bas, car ceux-ci sont les plus proches des points de référence décrits auparavant². Si les quatre classements sont conformes au classement officiel, des choix de perturbations jouant sur les premières décimales changent complètement le classement.

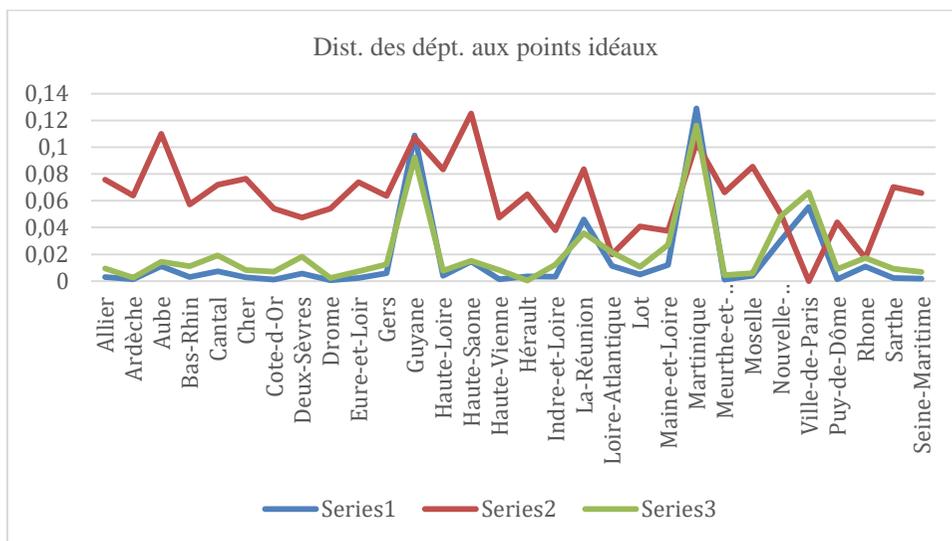
Pour le nuage de départements, on a choisi trois points de référence ; le premier est le barycentre global du nuage réel formé par les scores effectués par les douze candidats EM, MLP, JLM au premier tour, entâchés d'une erreur, pour chacun d'entre eux, qui n'affectent que les décimales à partir de la deuxième. Ce choix méthodologique se justifie comme antérieurement, et est plus légitime, puisqu'il repose sur un sondage fait dans toute la France et non pas sur autant de sondages qu'il y a de départements. Le second point de référence est

¹ Pour un tel nuage de 107 points en dimension 12, la borne de Good et Tideman vaut le nombre « astronomique » $0,97591 \cdot 10^{36}$. Par ailleurs, la factorielle de 107 vaut un nombre encore plus « astronomique » $0,12265 \cdot 10^{173}$. Ainsi, en dépit de leur variété si étonnante, les ordres linéaires proposés par Good et Tideman ne forment-ils qu'une fraction infinitésimale de tous les ordres linéaires imaginables sur le nuage de l'élection.

² Série1= $\text{dist}(\text{Pt}, \text{EM}) + \varepsilon$ et Série2= $\text{dist}(\text{Pt}, \text{MLP}) + \varepsilon$ et Série3= $\text{dist}(\text{Pt}, \text{JLM}) + \varepsilon$ et Série4= $(\text{Série1} + \text{Série2} + \text{Série3})/3$.

le score des candidats dans la Ville-de-Paris, le troisième dans les Bouches-du-Rhône, avec de petites erreurs de la même magnitude, mais aléatoires.

Dans cet exemple, ce qui est recherché n'est pas le classement des candidats humains, mais les départements imitant le mieux un point de repère¹. La série 1 montre que, parmi ces 30 départements, peuvent servir de tests pour les élections globales dans toute la France, dans l'ordre de proximité décroissante, la Drôme, la Côte-d'Or, la Meurthe-et-Moselle, la Haute-Vienne et l'Ardèche. La série 2 montre que, parmi ces 30 départements, les trois les plus distants de la Ville-de-Paris sont, du plus loin au plus proche, la Haute-Saône, l'Aube et la Guyane. Enfin la comparaison avec le département des Bouches-du-Rhône indique que l'Hérault est le plus proche de l'échantillon, et est à une distance de celle de la Martinique divisée par 200.



9. Conclusion et vue d'ensemble

A ce terme, on voit comme est variée dans ses approches la théorie du choix social, tant des points de vue politiques, économiques, financiers, sociologiques, moraux, que dans sa formalisation mathématique qui ne laisse pas d'étonner par les techniques employées pour elle. Si l'approche probabiliste est la plus ancienne, elle a été déclinée en de multiples variations, et à l'étude de la distribution aléatoire des votes relativement aux candidats présentés, s'est ajoutée la théorie des préordres de préférences aléatoires, ce qui a permis une abstraction supplémentaire obtenue en séparant les lois auxquelles obéissent les graphes des préférences individuelles des lois régissant les duels entre les alternatives présentées aux votants. D'autres techniques pour aborder les questions fines des choix sociaux sont apparues

¹ Le tableau donné au §6 est une matrice à 107 lignes et 12 colonnes. Chaque ligne définit un département, chaque colonne un candidat. Le lien étroit entre le premier et le second nuage tient au fait qu'on a transposé la matrice du premier nuage pour obtenir la matrice du second. C'est là une opération involutive ; toutefois le premier nuage a une signification politique puissante tandis que le second ne sera utile qu'à un institut de sondage ou à un chercheur.

également, comme celles liées à l'optimisation multi-critères, ou les questions délicates de nature topologique (par exemple dans l'existence de fonctions d'utilité sous-jacentes aux préférences) ou même, dans des travaux plus marginaux, des outils d'analyse harmonique (notamment les séries de Fourier discrètes) voire de géométrie. Mais il existe aussi, pour cette théorie, une longue tradition d'investigations statistiques (que nous n'avons qu'effleurées ici à travers l'exemple de l'élection présidentielle en France), et il n'est pas contestable que l'analyse des élections fait progresser la statistique mathématique, les sondages et aussi les méthodes d'estimation de paramètres¹.

Or, l'approche combinatoire, qui ne cherche pas les lois probabilistes dans les classes de votants ou de préférences, mais leur répartition et leur énumération, paraît ne pas donner encore tous ses fruits. Toutes les approches antérieures reposent sur des modèles éprouvés, là où la combinatoire offre parfois un état d'esprit mais pas de méthode générale, versatile et couronnée de succès².

On voit qu'ici une certaine démarche n'amène pas toujours une conclusion, un théorème qui synthétise avec précision le problème abordé³. Telle est la raison pour laquelle nous mettons, à ce stade, en exergue, le théorème donné au §7 : **Le nombre total de situations de Condorcet pour lesquelles $m_1 > m_2$, $m_3 > m_4$, $m_5 > m_6$ est égal au coefficient binomial $\binom{n}{5}$.**

Dans cet article, on a voulu, par ailleurs, identifier les connections étroites entre la théorie des graphes et la théorie de l'optimisation multi-critères. Ce qui rend convainquantes ces allégations, c'est justement la possibilité d'appliquer les différentes méthodes d'agrégation au premier tour de la Présidentielle en France (ou tout autre événement d'une telle ampleur), comme s'il s'agissait véritablement d'un choix de 107 décideurs n'ayant pas tous les mêmes droits, pouvoirs ou poids, à 12 alternatives. Ainsi, ce modèle est-il plausible dans le cadre de décisions industrielles ou commerciales, portant sur des alternatives variées étudiées selon plusieurs critères, et soumis à l'avis circonstancié des décideurs. Bien entendu, le caractère prédictif n'est ni l'essence même ni l'enjeu de cette étude, car les configurations impliquées ne sauraient être anticipées, d'une certaine manière il suffit qu'elles se soient produites⁴.

Pour finir, cette étude suggère trois pistes de recherches que nous voudrions évoquer concisément. Tout d'abord, l'exhaustion de configurations « à la Condorcet » lorsque l'abstentionnisme est autorisé, par une formule explicite, semble la question la plus

¹ Comme exemple récent, l'article de Arturo Erdely Ruiz, Análisis estadístico ex post del conteo rápido institucional de la elección de gobernador del Estado de México en 2017, <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1805/1805.08968.pdf>

² Plusieurs sciences mathématiques n'ont ainsi pas été *axiomatisées* au cours du vingtième siècle, particulièrement par l'Ecole Française autour de Bourbaki : combinatoire, théorie des graphes, équations diophantiennes, etc.

³ Par exemple, les deux articles suivants sont vraiment (intéressants et) combinatoires essentiellement mais ne débouchent hélas sur aucun théorème! D'abord, l'article de J.-P. Benoit, L. A. Kornhauser, Only a Dictatorship is Efficient or Neutral, https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=954698, et ensuite l'article de H. Fargier, J. Lang, J. Mengin, N. Schmidt, Procédure de vote parallèle dans les référendums multiples : une approche expérimentale. RFIA 2012 (Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle), 2012, Lyon, France. pp. 978-2-9539515-2-3. hal-00656520.

⁴ Là, à nouveau, citons le travail statistique de N. Boehmer et N. Schaar, cité au §2, dans lequel plusieurs configurations ont été détectées dans des situations historiques réelles.

immédiate. En ce cas, ce n'est pas moins de 27 classes d'électeurs, désignées par des mots du type xyz (voir §7 pour l'énumération des huit premières) qu'il faut introduire. Ensuite, la généralisation au cas où on dispose de plus de trois alternatives. Mais il y a aussi la formalisation dans la combinatoire d'élections dans lesquelles les décideurs ont eux-mêmes des poids, ou bien les alternatives, et cette adaptation semble devoir acheminer sur de sérieuses difficultés techniques.

Bibliographie

- Aizerman, M., Aleskerov, F., *Theory of Choice*, volume 38 of *Studies in Mathematical and Managerial Economics*. North-Holland, 1995.
- Arrow, K. J. *Social Choice and Individual Values*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1st edition, 1951, 2nd edition, 1963.
- Arrow, K. J., Sen, A. K., Suzumura, K., eds. 2002. *Handbook of Social Choice and Welfare*, Volume 1. North Holland. ISBN 9780444829146.
- Austen-Smith, D., Banks, J.S., Information aggregation, rationality, and the Condorcet jury theorem, *American political science review*, 90 (1996), pp. 34–45.
- Chernoff, H., Rational selection of decision functions. *Econometrica*, 22: 422–443, 1954.
- Cover, T.C., The number of linearly inducible orderings of points in \mathbb{R}^d . *SIAM J. Appl. Math.*, 15:434–439, 1967.
- Fishburn, P.C., *The Theory of Social Choice*. Princeton University Press, 1973.
- Gaertner, W., *Domain Conditions in Social Choice Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- Gehrlein, W. V. (2006). *Condorcet's paradox*. Springer Berlin Heidelberg.
- Good, I. J., Tideman, T. N., Stirling numbers and a geometric structure from voting theory. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 23 (1):34–45, 1977.
- Laslier, J. F., Aggregation of preferences with a variable set of alternatives. *Social Choice and Welfare*, 17: 269–282, 2000.
- May, R. M. (1971). Some mathematical remarks on the paradox of voting. *Behavioral Science*, 16(2), 143–151.
- Moulin, H., Choice functions over a finite set: A summary. *Social Choice and Welfare*, 2: 147–160, 1985.
- Murakami, Y., *Logic and Social Choice*. Dover Publications, New York, 1968.
- Ryckelynck, Ph. (2022), Quantifier des critères de sélection booléens, *Les Cahiers du Cedimes*, vol. 2022, numéro 4.
- Schwartz, T., *The Logic of Collective Choice*. Cambridge Studies in Probability, Induction, and Decision Theory. Columbia University Press, New York, 1986.
- Sen, A. K., Social choice theory. In K. J. Arrow and M. D. Intriligator, editors, *Handbook of Mathematical Economics*, volume 3, chapter 22, pages 1073–1181. Elsevier, 1986.
- Sommerland, F., McLean, I., (1989, eds). *The political theory of Condorcet*. University of Oxford Working Paper, Oxford, pp 69–80.
- Wilson, R., Social choice theory without the Pareto principle. *Journal of Economic Theory*, 5 (3): 478–486, 1972.